

**EPFL**

Enseignant : Dr. Sylvain Bréchet
Cours : physique générale I
Echéance : vendredi 14 novembre 2025
Durée : 90 minutes

2

Tube en rotation

NOM:

PRENOM:

N° SCIPER:

SECTION: **Mathématiques**

SALLE:

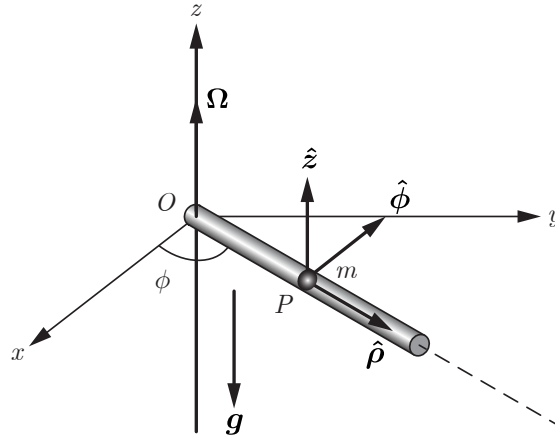
L'exercice à rendre comporte un énoncé illustré et détaillé sur la page de gauche et des questions sur la page de droite. Les développements mathématiques et physiques sont à effectuer sur les pages quadrillées.

Consignes

- Le **formulaire** de l'examen (1 page A4 recto-verso) est autorisé.
- L'utilisation de tout **appareil électronique** est interdite.
- Les **réponses** sont à retranscrire sur les pointillés sous chaque question dans l'espace réservé à cet effet.
- Utiliser un **stylo** à encre **noir ou bleu foncé** (éviter d'utiliser un crayon) et effacer proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Les feuilles de papier **brouillon** ne seront **pas corrigées**.



2. Tube en rotation



On considère une centrifugeuse constituée d'un tube tournant dans un plan horizontal avec une vitesse angulaire constante $\Omega = \Omega \hat{z}$ autour de son extrémité située à l'origine O dans le plan horizontal Oxy . Une bille de masse m , considérée comme un point matériel P , est astreinte à glisser le long du tube.

Pour décrire la dynamique du point matériel, on choisit un repère cylindrique $(P, \hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{z})$ où le vecteur unitaire radial $\hat{\rho}$ est orienté le long de l'axe du tube vers l'extérieur, le vecteur unitaire $\hat{\phi}$ est orienté dans le sens trigonométrique et le vecteur unitaire \hat{z} est orienté vers le haut. Le point matériel est soumis à une force de frottement visqueux en régime laminaire,

$$\mathbf{F}_f = -\frac{m}{\tau} \mathbf{v}_\rho$$

où τ est le temps caractéristique de l'amortissement et \mathbf{v}_ρ est la vitesse radiale du point matériel qui est orientée selon le vecteur $\hat{\rho}$.

Les réponses doivent être exprimées en termes des grandeurs scalaires données ci-dessus, des coordonnées cylindriques ρ et z et de leurs dérivées temporelles, des vecteurs de base $\hat{\rho}$, $\hat{\phi}$ et \hat{z} , de la norme du champ gravitationnel g et des grandeurs scalaires spécifiées dans l'énoncé de chaque question.

Questions et réponses ci-contre, calculs sur les pages quadrillées suivantes



1. Déterminer la norme et l'orientation du vecteur accélération de la bille.

Les contraintes géométriques sur la vitesse angulaire azimutale $\dot{\phi}$, la coordonnée verticale z et leurs dérivées temporelles sont les suivantes,

$$\begin{aligned} \dot{\phi} = \Omega = \text{cste} \quad \text{ainsi} \quad \ddot{\phi} = 0 \\ z = 0 \quad \text{ainsi} \quad \dot{z} = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{z} = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Compte tenu des contraintes géométriques (1), l'accélération en coordonnées cylindriques s'écrit,

$$\mathbf{a} = (\ddot{\rho} - \rho\Omega^2) \hat{\rho} + 2\dot{\rho}\Omega \hat{\phi} \quad (2)$$

2. Déterminer les forces extérieures exercées sur la bille.

Les forces extérieures exercées sur le point matériel sont son poids \mathbf{P} , la force de réaction normale \mathbf{N} et la force de frottement visqueux \mathbf{F}_f . Compte tenu de la vitesse radiale,

$$\mathbf{v}_\rho = \dot{\rho} \hat{\rho} \quad (3)$$

ces forces s'expriment en coordonnées cylindriques comme,

$$\begin{aligned} \mathbf{P} = m\mathbf{g} = -mg\hat{z} \quad \text{et} \quad \mathbf{N} = N_\phi \hat{\phi} + N_z \hat{z} \\ \mathbf{F}_f = -\frac{m}{\tau} \dot{\rho} \hat{\rho} \end{aligned} \quad (4)$$

3. Déterminer la norme et l'orientation de la force de réaction normale \mathbf{N} exercée par le tube sur la bille en fonction de son mouvement.

La loi vectorielle du mouvement de la bille s'écrit,

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} = \mathbf{P} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_f = m\mathbf{a} \quad (5)$$

Compte tenu de l'accélération (2) et des forces extérieures (4), la projection de la loi du mouvement (5) le long des lignes de coordonnées cylindriques donne lieu à trois équations scalaires,

$$\text{selon } \hat{\rho} : -\frac{m}{\tau} \dot{\rho} = m(\ddot{\rho} - \rho\Omega^2) \quad (6)$$

$$\text{selon } \hat{\phi} : N_\phi = 2m\Omega\dot{\rho} \quad (7)$$

$$\text{selon } \hat{z} : -mg + N_z = 0 \quad (8)$$

Compte tenu des équations (7) et (8), la force de réaction normale (4) s'écrit explicitement comme,

$$\mathbf{N} = 2m\Omega\dot{\rho}\hat{\phi} + mg\hat{z} \quad (9)$$

4. Dans la limite où la rotation est négligeable par rapport au frottement,

$$m\rho\Omega^2 \ll \frac{m}{\tau} \dot{\rho}$$

déterminer l'équation horaire de la coordonnée $\rho(t)$ le long du tube compte tenu des conditions initiales $\rho(0) = 0$ et $\dot{\rho}(0) = v_0$. En déduire l'évolution temporelle du vecteur moment cinétique $\mathbf{L}_O(t)$ évalué à l'origine O .

Dans la limite où la rotation est négligeable, l'équation du mouvement radial (6) se réduit à,

$$\ddot{\rho} = -\frac{1}{\tau} \dot{\rho} \quad \text{où} \quad \ddot{\rho} = \frac{d\dot{\rho}}{dt} \quad (10)$$

qui peut être mise sous la forme suivante,

$$\frac{d\dot{\rho}(t)}{\dot{\rho}(t)} = -\frac{dt}{\tau} \quad (11)$$



L'intégration de l'équation différentielle (11) du temps initial $t = 0$ au temps t s'écrit formellement,

$$\int_{v_0}^{\dot{\rho}(t)} \frac{d\dot{\rho}'(t')}{\dot{\rho}'(t')} = -\frac{1}{\tau} \int_0^t dt' \quad (12)$$

La solution de l'équation intégrale (12) est,

$$\ln \left(\frac{\dot{\rho}(t)}{v_0} \right) = -\frac{t}{\tau} \quad (13)$$

d'où l'on tire l'évolution temporelle de la coordonnée de vitesse radiale,

$$\dot{\rho}(t) = v_0 \exp \left(-\frac{t}{\tau} \right) \quad (14)$$

L'intégration de la coordonnée de vitesse radiale (14) multipliée par l'intervalle de temps infinitésimal du temps initial $t = 0$ au temps t s'écrit formellement,

$$\int_0^{\rho(t)} d\rho'(t') = v_0 \int_0^t \exp \left(-\frac{t'}{\tau} \right) dt' \quad (15)$$

La solution de l'équation intégrale (15) est,

$$\rho(t) = v_0 \tau \left(1 - \exp \left(-\frac{t}{\tau} \right) \right) \quad (16)$$

Le vecteur moment cinétique de la bille évalué à l'origine s'écrit en coordonnées cylindriques,

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m \mathbf{r} \times \mathbf{v} = m (\rho \hat{\rho}) \times \left(\dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \Omega \hat{\phi} \right) = m \rho^2 \Omega \hat{z} \quad (17)$$

En substituant l'évolution temporelle (16) de la coordonnée radiale dans l'expression (17) du moment cinétique en coordonnées cylindriques, on en déduit son évolution temporelle,

$$\mathbf{L}_O(t) = m v_0^2 \tau^2 \Omega \left(1 - \exp \left(-\frac{t}{\tau} \right) \right)^2 \hat{z} \quad (18)$$

5. Dans la limite où le frottement est négligeable par rapport à la rotation,

$$\frac{m}{\tau} \dot{\rho} \ll m \rho \Omega^2$$

déterminer l'équation horaire de la coordonnée $\rho(t)$ le long du tube compte tenu des conditions initiales $\rho(0) = \rho_0$ et $\dot{\rho}(0) = 0$. En déduire l'évolution temporelle du vecteur moment cinétique $\mathbf{L}_O(t)$ évalué à l'origine O .

Dans la limite où le frottement est négligeable, l'équation du mouvement radial (6) se réduit à,

$$\ddot{\rho}(t) = \Omega^2 \rho(t) \quad (19)$$

L'équation différentielle (19) du deuxième ordre est équivalente aux équations différentielles du premier ordre,

$$\dot{\rho}(t) = \pm \Omega \rho(t) \quad (20)$$

On le montre par itération en dérivant l'équation différentielle (20) par rapport au temps,

$$\ddot{\rho}(t) = \pm \Omega \dot{\rho}(t) = \Omega^2 \rho(t) \quad (21)$$

L'équation différentielle (20) peut être mise sous la forme suivante,

$$\frac{d\rho(t)}{\rho(t)} = \pm \Omega dt \quad (22)$$



L'intégration de l'équation différentielle (22) du temps initial $t = 0$ au temps t s'écrit formellement,

$$\int_{\rho_0}^{\rho(t)} \frac{d\rho'(t')}{\rho'(t')} = \pm \Omega \int_0^t dt' \quad (23)$$

La solution de l'équation intégrale (23) est,

$$\ln \left(\frac{\rho(t)}{\rho_0} \right) = \pm \Omega t \quad (24)$$

d'où l'on tire deux solutions particulières pour l'évolution temporelle de la coordonnée radiale,

$$\rho_1(t) = \rho_0 \exp(\Omega t) \quad \text{et} \quad \rho_2(t) = \rho_0 \exp(-\Omega t) \quad (25)$$

La solution générale est une combinaison linéaire des solutions particulières,

$$\rho(t) = A \rho_1(t) + B \rho_2(t) = A \rho_0 \exp(\Omega t) + B \rho_0 \exp(-\Omega t) \quad (26)$$

La dérivée temporelle de la solution (26) s'écrit,

$$\dot{\rho}(t) = A \rho_0 \Omega \exp(\Omega t) - B \rho_0 \Omega \exp(-\Omega t) \quad (27)$$

La condition initiale sur la coordonnée radiale (26) est,

$$\rho(0) = (A + B) \rho_0 = \rho_0 \quad (28)$$

et la condition initiale sur la vitesse radiale (27) est,

$$\dot{\rho}(0) = (A - B) \rho_0 \Omega = 0 \quad (29)$$

Les conditions initiales (28) et (29) se réduisent au système,

$$A + B = 1 \quad \text{et} \quad A - B = 0 \quad (30)$$

dont la solution est,

$$A = B = \frac{1}{2} \quad (31)$$

Compte tenu des coefficients (31), la coordonnée radiale (26) devient,

$$\rho(t) = \frac{1}{2} \rho_0 \left(\exp(\Omega t) + \exp(-\Omega t) \right) = \rho_0 \cosh(\Omega t) \quad (32)$$

Pour un temps suffisamment grand, i.e. $\Omega t \gg 1$, en première approximation $\exp(-\Omega t) \ll \exp(\Omega t)$. Ainsi, la coordonnée radiale se réduit à,

$$\rho(t) \simeq \frac{1}{2} \rho_0 \exp(\Omega t) \quad (33)$$

En substituant l'évolution temporelle (32) de la coordonnée radiale dans l'expression (17) du moment cinétique en coordonnées cylindriques, on en déduit son évolution temporelle,

$$L_O(t) = \frac{1}{4} m \rho_0^2 \Omega \left(\exp(\Omega t) + \exp(-\Omega t) \right)^2 \hat{z} = m \rho_0^2 \Omega \cosh^2(\Omega t) \hat{z} \quad (34)$$

Pour un temps suffisamment grand, i.e. $\Omega t \gg 1$, en première approximation $\exp(-\Omega t) \ll \exp(\Omega t)$. Ainsi, le moment cinétique se réduit à,

$$L_O(t) \simeq \frac{1}{4} m \rho_0^2 \Omega \exp(2\Omega t) \hat{z} \quad (35)$$